

حجم و مساحت

به نام خدا

در این فصل مناسبه حجم و مساحت برنی از حجم‌های هندسی رو یاد می‌گیریم.

حجم و مساحت کره:

در این قسمت دو تا مطلب مهم باید یاد بگیریم، اولین مطلب اینه:

$$\text{حجم کره‌ای به شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می‌آید.}$$

توجه کنید که ما برای به دست آوردن حجم کره، فقط و فقط نیاز داریم که شعاع کره رو داشته باشیم.

پس هر مساله ای که برای مناسبه حجم کره بهمون دادن، ما از اطلاعاتش برای به دست آوردن شعاع استفاده می‌کنیم. پس نکته مهم برای ما پیدا کردن شعاع کره هست، چون بعد از به دست آوردن شعاع، به راحتی می‌تونیم حجم رو پیدا کنیم.

لطفا توجه کنید که در حل سوالها بهتره که هر جا π داشتیم، به جای π مقدارش رو نذاریم، بعد از اینکه محاسبات رو انجام دادیم، در آخر مقدار π رو جاگذاری کنیم. یا اینکه به جای π مقدار ۳ رو قرار بدیم که محاسباتمون طولانی نشه.

مثال:

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع 10° سانتی متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

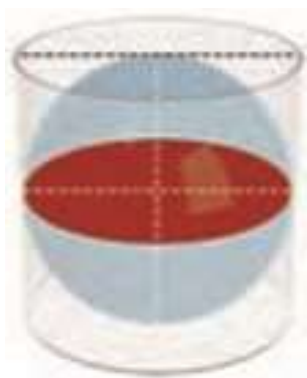
ب) حجم استوانه را به دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

الف)

گفتیم هر مساله‌ای که برای مناسبه حجم کره به ما داده بودن، اول به دنبال شعاع کره می‌گردیم. حالا از این نکته که کره در استوانه محاط شده می‌فویایم استفاده کنیم و شعاع کره رو به دست بیاریم.

وقتی کره در استوانه محاط میشه، چه شکلی میشه؟



به شکل دقت کنید، چه ارتباطی بین شعاع کره و شعاع قاعده استوانه وجود داره؟

قطر قاعده استوانه = قطر کره ، بنابراین:

شعاع قاعده استوانه = شعاع کره

پس ما آگه شعاع قاعده استوانه رو داشته باشیم در واقع شعاع کره رو هم به دست آوردیم.

صورت سوال به ما گفته قطر قاعده برابر 10 هست ، بنابراین:

$$\text{شعاع قاعده} = 10 \div 2 = 5$$

پس شعاع کره هم $r = 5$ هست، با استفاده از فرمول مناسبه حجم کره داریم:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 5^3 = 500$$

(ب)

قبلا یاد گرفتیم که حجم استوانه برابره با: مساحت قاعده \times ارتفاع. بنابراین:

$$\text{مساحت قاعده} = \pi r^2 = 3 \times 5^2 = 75$$

صورت سوال ارتفاع استوانه رو هم به ما داده و برابر 10 هست، بنابراین:

$$\text{حجم استوانه} = 75 \times 10 = 750$$

(پ)

حجم فضای بین کره و استوانه برابر تفاضل حجم این دو تا هست یعنی:

$$750 - 500 = 250$$

مطلب بعدی که در این قسمت یاد می‌گیریم، مساحت کره هست.

برای مناسبه مساحت کره هم فقط به شعاع کره احتیاج داریم. مساحت کره از رابطه زیر به دست میاد:

$$S = 4\pi R^2$$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با:

مثال:



۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره
به شعاع 10 سانتی متر را پیدا کنید.

میفوییم مساحت این کلاه رو به دست بیاریم، همینطور که می بینید این کلاه نصف یه کره
هست. پس ما برای به دست آوردن مساحت این کلاه، باید مساحت کره رو به دست
بیاریم و نصفش کنیم.

شعاع کره به ما داده شده و برابر 10 هست، بنابراین:

$$s = 4\pi r^2 = 4 \times 3 \times (10)^2 = 1200$$

این عدد مساحت یه کره کامله ولی این کلاه نصف یه کره س، بنابراین:

$$\text{مساحت کلاه} = 1200 \div 2 = 600$$

در ادامه تمرینهای صفحه 134 رو با هم حل می کنیم تا بیشتر به مباحث این قسمت
مسلط بشیم 😊

تمرین صفحه 134

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود 12800 کیلومتر است.
- الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
- ب) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید.
- ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $1/648/000$ کیلومتر مربع است. مساحت
ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

الف:

(یادآوری: برای تبدیل یک عدد به نماد علمی، باید اون رو به صورت $a \times 10^b$ بنویسیم که در اون، a یه عدد بین یک تا ۹ هست، یعنی: $1 \leq a \leq 9$)

$$\text{قطر} = 1.28 \times 10^4$$

شعاع رو به دست میاریم و بعد اون رو به صورت نماد علمی می نویسیم:

$$12800 \div 2 = 6400$$

$$\text{شعاع} = 6.4 \times 10^3$$

ب:

مساحت کره زمین رو به دست میاریم:

$$s = 4\pi r^2 = 4 \times 3 \times (6400)^2 = 491520000$$

$$\text{مساحت تقریبی کره} = 4.9 \times 10^8$$

ج:

$$\frac{\text{مساحت ایران}}{\text{مساحت زمین}} = \frac{1648000}{491520000}$$

این نسبت مساحت ایران به مساحت کره زمین، آگه بفوایم این نسبت رو با درصد

نشون بدیم، باید جلوی مساحت زمین عدد ۱۰۰ رو بنویسیم:

$$\frac{1648000}{491520000} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{1648000 \times 100}{491520000} = 0.33\%$$

می‌تونستیم برای ساده تر شدن مقایسه، عددها رو بصورت نماز علمی بنویسیم و بعد مقایسات رو انجام بدیم:

$$\frac{1.648 \times 10^6}{4.9152 \times 10^8} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{1.648 \times 10^6 \times 100}{4.9152 \times 10^8} = \frac{1.648 \times 10^8}{4.9152 \times 10^8}$$

اینجا عددهای تواندار از صورت و مخرج حذف میشن چون با هم برابرن و داریم:

$$\frac{1.648}{4.9152} = 0.33\%$$



۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶۰ سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد.

برای قسمت اول نیاز داریم که حجم رو بر حسب متر مکعب به دست بیاریم، برای این کار بهتره که اول اندازه‌ها رو به متر تبدیل کنیم و بعد مقایسات رو انجام بدیم.

پس در اینجا قطر دایره قاعده ۰/۶ متر هست.

حجم کپسول برابر حجم یک نیم کره با اضافه حجم یک استوانه‌س. این همها رو جداگانه مقایسه می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم:

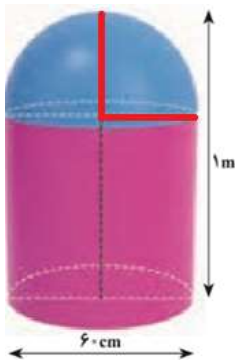
حجم استوانه برابر با: مساحت قاعده \times ارتفاع، یا به عبارتی $\pi r^2 h$

پس ما برای به دست آوردن حجم استوانه، باید شعاع قاعده و ارتفاع استوانه رو داشته باشیم.

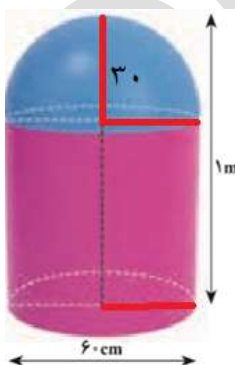
شعاع استوانه برابر با:

$$0.6 \div 2 = 0.3$$

حالا باید ارتفاع رو به دست بیاریم. به شکل زیر توجه کنید:



دو تا خط قرمزی که برای کره کشیدیم شعاعهای کره هستن، می‌دونیم که شعاعهای کره با هم برابرن، از طرفی با دقت در شکل متوجه می‌شیم که شعاع دایره با شعاع قاعده استوانه مساوی و برابر 0.3 متره.



حالا کل این اندازه برابر 1 متره، 0.3 اون هم شعاع کره هست، پس ارتفاع استوانه برابر با:

$$1 - 0.3 = 0.7$$

بنابراین:

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = \pi \times 0.3^2 \times 0.7 = 0.063\pi$$

شعاع کره رو هم داریم، حجم اون رو به دست میاریم:

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0.3^3 = 0.036\pi$$

این حجم کل کره هست ولی ما حجم نصف کره رو نیاز داریم:

$$\text{حجم نیم کره} = 0.036\pi \div 2 = 0.018\pi$$

این دو مقدار رو با هم جمع می کنیم:

$$0.063\pi + 0.018\pi = 0.081\pi$$

حالا که مقادیرمون تموم شد به جای π قرار میدیم ۳

$$0.081\pi = 0.081 \times 3 = 0.243$$

قسمت دوم سوال:

برای مقاسمه رنگ مورد نیاز باید مساحت کل کپسول رو پیدا کنیم. مساحت کپسول از ۳

قسمت تشکیل شده:

مساحت نیم کره

مساحت کف کپسول (که برابر یه دایره س)

مساحت دور استوانه یا مساحت جانبی استوانه

این سه تا مقدار رو مقاسمه می کنیم و با هم جمع می کنیم:

مساحت نیم کره:

$$s = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 0.3^2 = 0.36\pi$$

این عدد مساحت یه کره کامله ولی این نصف یه کره س، بنابراین:

$$\text{مساحت نیم کره} = 0.36\pi \div 2 = 0.18\pi$$

مساحت کف کپسول:

$$\text{مساحت کف} = \pi r^2 = \pi \times 0.3^2 = 0.09\pi$$

مساحت جانبی استوانه:

$$\text{مساحت جانبی} = 2\pi r h = 2 \times \pi \times 0.3 \times 0.7 = 0.42\pi$$

بنابراین:

$$\text{مساحت کپسول} = 0.18\pi + 0.09\pi + 0.42\pi = 0.69\pi$$

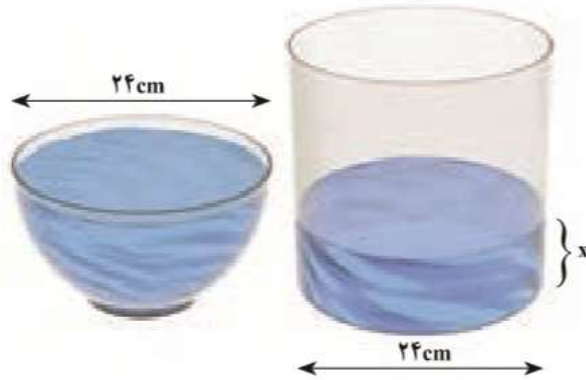
برای هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ احتیاج داریم، پس برای 0.69π متر مربع به مقدار زیر رنگ لازم داریم:

$$0.69\pi \times 100 = 69\pi$$

حالا که محاسباتمون تموم شد به جای π مقدار ۳ رو قرار میدیم:

$$69\pi = 69 \times 3 = 207$$

خب این مقدار رنگ مورد نیاز بر حسب گرمه، که آگه بخوایم به کیلوگرم تبدیلش کنیم برابر میشه با ۰/۲۰۷ کیلوگرم



۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

مجموع آبی که داخل نیم کره هست با مجموع آبی که داخل استوانه‌س با هم برابره. یعنی:

مجموع آب استوانه = مجموع آب نیم کره

مجموع آب داخل نیم کره رو به دست میاریم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi r^2 x$$

حالا این تساوی رو به صورت زیر ساده می‌کنیم تا مقدار x به دست بیاد.

هر دو طرف تساوی π داریم، پس از طرفین فطش می‌زنیم.

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi r^2 x$$

از سمت راست r^2 رو فط می‌زنیم و در سمت چپ توان r رو منهای ۲ می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^{3-2} = \pi r^2 x$$

در نهایت داریم:

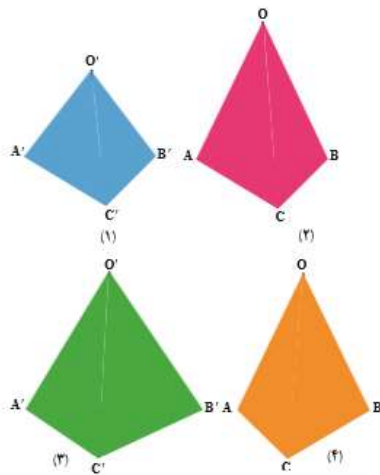
$$\frac{2}{3} r = x$$

مقدار r رو جاگذاری می‌کنیم تا x به دست بیاد:

$$x = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

هرم:

در این قسمت از درس با "هرم" و "مفروض" آشنا می‌شویم.
هرم به حجم هندسی که کف اون چند ضلعیه و هر وجه کناریش به مثلث
هرگدوم از شکلهای زیر یک هرم هستن:



هرم دو تا عدد داره که ما توی محاسبات بهش احتیاج داریم، یکی مساحت قاعده هرم
که اون رو با S نشون میدیم و یکی هم ارتفاع هرم که با h نشون میدیم.
حجم هر هرم از رابطه زیر به دست میاد:

حجم هر هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

مساحت قاعده هرم بطوری به دست میاد؟

بستگی داره به اینکه قاعده هرم چه شکلی داشته باشه. هر شکلی که داشت با توجه به
رابطه مربوطه، مساحتش رو به دست میاریم.

یه شکل هندسی دیگه وجود داره که خیلی شبیه به هرمه، چه شکلی؟ مخروط
تفاوت مخروط با هرم اینه که **قاعده مخروط هتما باید دایره باشه** ولی قاعده هرم میتونه
هر چند ضلعی که میخواد باشه.

حجم هرم و مخروط شبیه هم حساب میشه، یعنی **حجم مخروط هم برابر $\frac{1}{3}sh$ هست**، ولی
چون قاعده مخروط دایره‌س، می‌تونیم به جای S مستقیماً رابطه مربوط به مساحت دایره
رو بنویسیم. بنابراین:

حجم مخروط با شعاع قاعده ۲ برابر است با:

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

در ادامه تمرینهای صفحه ۱۳۹ رو با هم حل می‌کنیم:

تمرین صفحه ۱۳۹

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع آن
۱۰ سانتی‌متر باشد.

قاعده به شکل مستطیله، بنابراین:

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = ۶ \times ۵ = ۳۰$$

بنابراین:

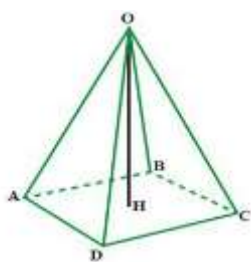
$$v = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 10 = 100$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

قاعده مربعی به ضلع ۴ هست، مساحت قاعده رو به دست می‌اریم:

$$S = 4 \times 4 = 16$$

حالا باید ارتفاع این هرم رو به دست بیاریم. وجه‌ها مثلث‌های متساوی‌الساقین هستن، ارتفاع این شکل به صورت زیره:

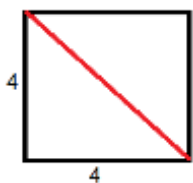


ما نیاز داریم اندازه OH رو به دست بیاریم.

اگه H رو به C وصل کنیم، یه مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع OC و OH و HC داریم.

اندازه OC برابر ۸ هست (صورت سوال گفته)

اندازه HC چنده؟ HC برابر نصف قطر مربعی به ضلع ۴ هست.



با استفاده از رابطه فیثاغورس، قطر رو به دست می‌اریم و بعد اونو نصف می‌کنیم:

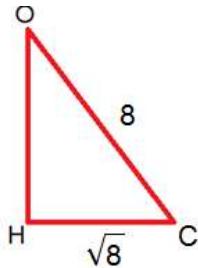
$$\text{قطر}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

بنابراین:

$$\text{قطر} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$$

$$HC = \text{نصف قطر} = \frac{2\sqrt{8}}{2} = \sqrt{8}$$

پس داریم:



بنابراین OH یا همون ارتفاع هرم از رابطه زیر به دست میاد:

$$(OC)^2 = (OH)^2 + (HC)^2$$

$$8^2 = (OH)^2 + \sqrt{8}^2$$

$$(OH)^2 = 8^2 - \sqrt{8}^2 = 64 - 8 = 56$$

$$OH = \sqrt{56}$$

مساحت قاعده رو که به دست آورده بودیم، ارتفاع هرم رو هم به دست آوردیم، پس به راحتی می‌تونیم حجم هرم رو به دست بیاریم:

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{56}$$



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟



حجم آب داخل مخروط با حجم آب ریخته شده داخل استوانه برابره.

ابتدا حجم آب مخروط رو مناسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3 \times 4^2 \times 12 = 192$$

با فرض اینکه آب داخل استوانه تا ارتفاع x بالا بیاد ، حجم آب داخل استوانه رو حساب می‌کنیم:

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 x = 3 \times 6^2 \times x = 72x$$

این دو مقدار رو مساوی قرار میدیم تا x به دست بیاد:

$$72x = 192$$

و از اینجا:

$$x = \frac{192}{72} = 2.6$$

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های [@RiaziBaHam](https://www.instagram.com/RiaziBaHam) و [@RiaziBaHam9](https://www.instagram.com/RiaziBaHam9)

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.